Integrazione per sostituzione

Questo metodo viene utilizzato per semplificare il calcolo di alcuni integrali e consiste nella sostituzione della variabile d'integrazione mediante una funzione del tipo $x = g(t)$:

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt$$

Esempio 1

Calcoliamo il seguente integrale:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx =$$

Poniamo $\sqrt{x} = t \rightarrow x = t^2 \rightarrow dx = 2tdt$

Sostituiamo si ha:

$$\int \frac{t}{t^2+1} \cdot 2tdt =$$

$$= 2\int \frac{t^2}{t^2+1}dt = 2\int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt = 2\int \frac{t^2+1}{t^2+1}dt - 2\int \frac{1}{t^2+1}dt = 2\int dt - 2\int \frac{1}{t^2+1}dt = 2t - 2arctgt + c$$

Pertanto l'integrale dato è:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx = 2\sqrt{x} - 2arctg\sqrt{x} + c$$

Esempio 2

Calcoliamo il seguente integrale:

$$\int \frac{2e^x}{e^{2x}+1}dx$$

Poniamo:

$t = e^x$

$dt = e^x dx \rightarrow dx = \dfrac{dt}{t}$

l'integrale diventa: $\int \frac{2t}{t^2+1} \cdot \frac{dt}{t} = 2\int \frac{1}{t^2+1}dt = 2arctgt + C =$

Pertanto l'integrale dato è:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx = 2arctge^x + C$$

Esempio 3

Calcoliamo il seguente integrale:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx$$

Poniamo:

$x = sent \rightarrow t = arcsenx$

$dx = \cos t \cdot dt$

Sostituiamo si ha:

$$\int \sqrt{1-sen^2 t} \cdot \cos t dt = \int \cos^2 t dt =$$

Applicando le formule di bisezione:

$$\int \cos^2 t dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} dt + \frac{1}{2} \int \cos 2t dt = \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int 2\cos 2t dt = \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} sen 2t + C =$$

$$= \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \cdot 2 sent \cos t + C$$

Dunque l'integrale dato è:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2} arcsenx + \frac{1}{2} x\sqrt{1-x^2} + C$$

Esempio 4

Calcoliamo il seguente integrale:

$$\int e^x \ \mathrm{tg} e^x dx$$

Poniamo $e^x = t \rightarrow x = \ln x \rightarrow dx = \frac{1}{t} dt$

l'integrale diventa:

$$\int \mathrm{tgt\ dt} = \int \frac{\mathrm{sent}}{\mathrm{cost}} dt = -\int \frac{1}{\cos t} d(\cos t) = -\log|\cos t| + \mathrm{C}$$

Applicando la sostituzione si ha:

$$\int e^x tge^x dx = -\log\left|\cos e^x\right| + C$$

Esempio 5

Calcoliamo il seguente integrale:

$$\int \frac{x}{tg\left(x^2+1\right)}dx$$

Dopo aver osservato che il numeratore è la derivata dell'argomento della tangente a meno di 1/2 si può scrivere:

$$\int \frac{x}{tg\left(x^2+1\right)}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{tg\left(x^2+1\right)}dx$$

Poniamo:

$$t = x^2+1 \rightarrow x = \sqrt{t-1} \rightarrow dx = \frac{1}{2\sqrt{t-1}}dt$$

Si ha:

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{tg}dt = \frac{1}{2}\int \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t}dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\operatorname{sen} t}d\left(\operatorname{sen} t\right) = \frac{1}{2}\log\left|\operatorname{sen} t\right| + C$$

e tornando alla soluzione si ha:

$$\int \frac{x}{tg\left(x^2+1\right)}dx = \frac{1}{2}\log\left|\operatorname{sen}\left(x^2+1\right)\right| + C$$

Esempio 6

Calcoliamo il seguente integrale:

$$\int \frac{x}{\operatorname{sen} x^2}dx$$

posto $t = x^2 \rightarrow x = \sqrt{t} \rightarrow dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt$

l'integrale diventa:

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{\operatorname{sen} t}dt =$$

Ricordiamo le formule parametriche: $\operatorname{sen} t = \dfrac{2tg\frac{t}{2}}{1+tg^2\frac{t}{2}}$

posto t/2=y risulta t=2y e dt=2dy e

$$\operatorname{sen} t = \frac{2tgy}{1+tg^2 y}$$

quindi:

$$\int \frac{1}{\frac{2tgy}{1+tg^2 y}} \cdot 2dy = \int \frac{1+tg^2 y}{tgy} dy = \int \frac{1}{tgy} dy + \int tgydy$$

I due integrali, già calcolati, danno la seguente soluzione:

$$\int \frac{1}{tgy} dy + \int tgydy = \log\left|\operatorname{sen} y\right| - \log\left|\cos y\right| + C = \log\left|\frac{\operatorname{sen} y}{\cos y}\right| + C$$

Tornando indietro con le sostituzioni si ha: $\frac{1}{2}\int \frac{1}{\operatorname{sen} t} dt = \log\left|tg\,\frac{t}{2}\right| + C$ e quindi:

$$\int \frac{x}{\operatorname{sen} x^2} dx = \log\left|tg\,\frac{x^2}{2}\right| + C$$